<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σχολικό σελίδα 135
Α2. Σχολικό σελίδα 51
Α3. Σχολικό σελίδα 23
Α4.
α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

ΘΕΜΑ Β
Β1
Θέτουμε όπου x+1 το y.
Οπότε $f(y) = ye^{-(y-1)} = ye^{1-y}$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.
Β2.
$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

Β3.
$f''(x) = [(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x}$
$= e^{1-x}(x-2)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Άρα η f είναι κοίλη στο$(-\infty, 2]$.
Οπότε παρουσιάζει καμπή στο σημείο (2, f(2))≡ $\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'}=$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0.$

Η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty.$
Άρα στο $-\infty$ δεν έχει ασύμπτωτες.

B4.
(i)
$A_1=(-\infty,1]$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1)=$
$(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)]=(-\infty,1]$.

$A_2=(1,+\infty)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2)=$
$(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x))=(0,1)$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

(ii)
$f(x)=\lambda$
Αν $\lambda\le 0$
$\lambda\in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1. (λόγω μονοτονίας στο A_1)

Αν $0<\lambda<1$
$\lambda\in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1. (λόγω μονοτονίας στο A_1)
$\lambda\in f(A_2)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_2. (λόγω μονοτονίας στο A_2)
Άρα έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Για λ=1 ακριβώς μία λύση

Για λ>1 καμία λύση.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $lnx = \frac{1}{x} \overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} xlnx = 1 \Leftrightarrow xlnx - 1 = 0$.

Θέτω $\varphi(x) = xlnx - 1$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\varphi(1) = -1 < 0$

$\varphi(e) = e - 1 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_0) = 0 \ \Leftrightarrow x_0 lnx_0 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_0 lnx_0 = 1$

$\varphi'(x) = lnx - x\frac{1}{x} = lnx$

Για $x \in (1, e) \quad lnx > 0,$ άρα $\varphi'(x) > 0$

Συνεπώς η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$

Οπότε το x_0 μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

ΚΑΛΑΪΤΖΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΜΑΝΩΛΗΣ
ΑΛΕΥΡΟΝΤΑΣ ΣΕΡΑΦΕΙΜ
ΣΑΜΑΡΤΖΗΣ ΠΕΤΡΟΣ
ΗΛΙΑΔΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΚΑΡΑΚΩΝΣΤΑΝΤΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΤΡΑΣΤΑΝΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ ΝΙΚΗ
ΦΡΑΝΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΣΚΟΥΛΑΞΕΝΟΣ ΒΑΓΓΕΛΗΣ
ΚΑΚΛΑΜΑΝΗΣ ΝΙΚΟΣ
ΓΙΑΝΝΑΚΟΥ ΝΙΚΗ
ΠΕΤΡΑ ΖΩΗ
ΓΚΟΛΕΜΗ ΡΕΝΙΑ
ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΗΤΡΟΓΛΟΥ ΝΑΣΟΣ
ΠΑΠΑΛΙΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
ΓΚΑΝΑΤΣΙΟΣ ΣΤΕΛΙΟΣ
ΚΟΥΚΟΥΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΓΕΩΡΓΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ
ΤΣΙΟΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΖΕΝΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΟΝΤΟΣΤΕΡΓΙΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ